III Théorème de Wiener-Ikehara

C'est un très joli développement qui mélange plusieurs aspects de l'analyse : Séries de fonctions, transformation de Fourier, interversion de symboles (convergence dominée, monotone), des estimations non triviales et un peu (tout petit peu [2]) de fonctions holomorphes.

Ce développement va utiliser la notion de série de Dirichlet, cependant il n'y a pas de notions pré-requises pour faire ce développement. Pourtant, il FAUT connaître des choses sur les séries de Dirichlet si on veut pouvoir l'appliquer, on pourra par exemple aller voir dans le Zuily-Quéffelec. En ce qui concerne le développement, on le trouvera dans *Problems in Analytic Number Theory* de Ram Murty.

III.1 La formule de sommation par parties

C'est vraiment une formule facile à démontrer et qui a de nombreuses applications : on retrouve par exemple des résultats de comparaison série-intégrale et c'est vraiment le résultat technique phare en théorie analytique des nombres et ça peut sauver une question un peu technique le jour de l'écrit.

Théorème III.1: Formule de sommation par parties

Soit $x \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{N}, f : [a, x] \to \mathbb{C}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a, x])$. Alors :

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(n) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(x) - \int_a^x g'(t) \left(\sum_{a \leqslant n \leqslant t} f(n) \right) \mathrm{d}t.$$

De plus, si $x \geqslant 2$, alors :

$$\sum_{p \leqslant x} f(p)g(p) = \sum_{p \leqslant x} f(p)g(x) - \int_2^x g'(t) \left(\sum_{p \leqslant t} f(p) \right) \mathrm{d}t.$$

Démonstration : Par le théorème fondamental de l'intégration, on peut écrire :

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(n) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n) \left(g(x) - \int_n^x g'(t) \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n) \left(g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \mathbb{1}_{[n,x]}(t) \,\mathrm{d}t \right).$$

2. Vraiment très très peu

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{a\leqslant n\leqslant x} f(n)g(n) &= \sum_{a\leqslant n\leqslant x} f(n)g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \sum_{a\leqslant n\leqslant x} f(n)\mathbb{1}_{[n,x]}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{a\leqslant n\leqslant x} f(n)g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t) \sum_{a\leqslant n\leqslant t} f(n)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{a\leqslant n\leqslant x} f(n)g(x) - \int_a^x g'(t) \sum_{a\leqslant n\leqslant t} f(n)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour obtenir le deuxième point on applique le premier point à la fonction $\tilde{f}$ qui vaut $f(p)$ si p est premier et 0 sinon. $\square$

III.2 Le développement

On rappelle la convention choisie pour la transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi la formule de Parseval s'écrit pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\hat{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On va commencer par introduire le noyau de Féjer :

$$K_\lambda(x) = \frac{\sin^2 \lambda x}{\lambda x^2}.$$

Sa transformée de Fourier est :[3]

$$\widehat{K}_\lambda(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}\left(1 - \frac{|x|}{2\lambda}\right) & \text{si } |x| \leq 2\lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin on rappelle la valeur de l'intégrale suivante :

$$\forall \lambda > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda x}{\lambda x^2} dx = \pi. \tag{III.1}$$

Voici le théorème à démontrer :

3. En fait on aura pas besoin de l'expression exacte, on va juste servir que sa transformée de Fourier est positive et à support compact

Théorème III.2: (Wiener-Ikehara)

Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ une série de Dirichlet avec $b_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que :

— La série de Dirichlet $F(s)$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > 1$,

— F peut être prolongée en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathcal{R}e(s) \geqslant 1\}$ et de plus F ne possède pas de pôle excepté en $s = 1$ où son résidu vaut $R > 0$.

Alors on a l'estimation suivante quand $x \to +\infty$:

$$B(x) := \sum_{n \leq x} b_n = Rx + o(x).$$

Démonstration : Quitte à remplacer b_n par b_n/R, on peut supposer sans perte de généralités que $R = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > 1$.

D'après la formule de sommmation par parties, on a :

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{b_n}{n^s} = \frac{1}{x^s} B(x) + s \int_1^x \frac{1}{t^{s+1}} B(t)\, \mathrm{d}t.$$

Or, par le théorème de convergence dominée (domination du terme général par $\frac{b_n}{n^s}$ qui converge bien par hypothèse) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{B(x)}{x^s} = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s} \left(\frac{n}{x}\right)^s \mathbb{1}_{n \leqslant x} = 0.$$

On obtient alors en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$F(s) = s \int_0^{\infty} B\left(e^u\right) e^{-us} du, \qquad \text{par changement de variable } t = e^u.$$

Comme $\int_0^{\infty} e^{-u(s-1)} du = \frac{1}{s-1}$, on voit qu'en notant $s = 1 + \delta + it$ avec $\delta > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{F(1+\delta+it)}{1+\delta+it} - \frac{1}{\delta+it} = \int_0^{\infty} \left(B\left(e^u\right) e^{-u} - 1\right) e^{-u\delta} e^{-iut} du. \tag{III.2}$$

On va maintenant adopter des notations afin d'y voir plus clair dans cette relation, on pose pour tout $u \in [0, +\infty[, t \in \mathbb{R}, \delta > 0$ les quantités suivantes.

$$\begin{aligned} g(u) &= B\left(e^u\right) e^{-u} \\ h_\delta(t) &= \frac{F(1+\delta+it)}{1+\delta+it} - \frac{1}{\delta+it} \\ h(t) &= \frac{F(1+it)}{1+it} - \frac{1}{it}. \end{aligned}$$

On remarque que h définit une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{C}$ a priori mais en fait, elle peut être prolongée en $t = 0$ en une fonction continue car le pôle d'ordre 1 de F en 1 est compensée par la présence du $\frac{1}{it}$ dans l'expression de h. Notre objectif désormais est de montrer que $g(u)$ tend vers 1 lorsque $u \to +\infty$.

On définit enfin :

$$\phi_\delta(t) = \begin{cases} (g(u)-1)e^{-u\delta} & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Ainsi l'équation III.2 devient alors que la transformée de Fourier de $\sqrt{2\pi}\phi_\delta$ est h_δ pour tout $\delta > 0$. Ces deux fonctions sont bien de carré intégrable. Pour voir cela on remarque d'abord que pour $x \to +\infty$ et pour tout $c > 0$:

$$B(x) = \sum_{n \leq x} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{n}\right)^c = \mathcal{O}\left(x^c\right), \quad \text{car } b_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi, on voit que pour tout $\delta > 0$: $\phi_\delta = o(e^{u\delta/2})$ quand $x \to +\infty$, ainsi $\phi_\delta \in L^2(\mathbb{R})$. Et alors $h_\delta \in L^2(\mathbb{R})$ comme transformée de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{R})$.

Soient $v \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On peut donc appliquer la formule de Parseval à ϕ_δ et $K_\lambda(\cdot - v)$ qui sont bien des fonctions de carré intégrable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\delta(u) K_\lambda(u-v) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_\delta(t) \widehat{K}_\lambda(t) e^{itv} dt. \tag{III.3}$$

Comme $t \mapsto h_\delta(t)\hat{K}_\lambda(t)e^{itv}$ est à support compact, le théorème de convergence dominée affirme que :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_\delta(t) \widehat{K}_\lambda(t) e^{itv} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \widehat{K}_\lambda(t) e^{itv} dt.$$

Pour traiter le membre de gauche de notre équation III.3, on utilise cette fois-ci le théorème de convergence monotone qui affirme que :

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\delta(u) K_\lambda(u-v) du = \int_0^{\infty} (g(u)-1) K_\lambda(u-v) du.$$

On en déduit par unicité de la limite :

$$\int_0^{\infty} (g(u)-1) K_\lambda(u-v) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \widehat{K}_\lambda(t) e^{itv} dt.$$

Ainsi, par le lemme de Riemann-Lebesgue (qu'on peut appliquer car $t \mapsto h(t)\widehat{K}_\lambda(t)$ est continu à support compact donc intégrable) :

$$\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty (g(u)-1)K_\lambda(u-v)du = \lim_{v\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty h(t)\widehat{K}_\lambda(t)e^{itv}dt = 0.$$

Ainsi, par III.1, on obtient alors :

$$\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty g(u)K_\lambda(u-v)du = \pi.$$

On introduit enfin $\alpha\in\mathbb{R}$ et on fait le changement de variable $u = v+\dfrac{\alpha}{\lambda}$ dans la dernière intégrale pour voir que :

$$\int_0^\infty g(u)K_\lambda(u-v)du = \int_{-\infty}^\infty g(u)K_\lambda(u-v)du = \int_{-\infty}^\infty g(v+\alpha/\lambda)\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha.$$

D'où :

$$\lim_{v\to\infty}\int_{-\infty}^\infty g(v+\alpha/\lambda)\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha = \pi. \tag{III.4}$$

Comme les b_n sont positifs pour tout n, on voit que B est une fonction croissante et ainsi par définition de g [4] :

$$g(u_2)\geq g(u_1)e^{u_1-u_2},\quad u_1\leq u_2. \tag{III.5}$$

On va d'abord montrer que $\limsup g \leqslant 1$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $|\alpha|\leq\sqrt{\lambda}$, on applique III.5 avec $u_1 = v-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et $u_2 = v+\dfrac{\alpha}{\lambda}$:

$$g\left(v+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\geq g\left(v-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\alpha}{\lambda}}\geq g\left(v-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}.$$

On en déduit en intégrant sur tous les α :

$$g(v-1/\sqrt{\lambda})e^{-2/\sqrt{\lambda}}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha\leq\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}g(v+\alpha/\lambda)\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha\leq\int_{-\infty}^{\infty}g(v+\alpha/\lambda)\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha.$$

Par conséquent :

$$\limsup_{v\to\infty} g(v) = \limsup_{v\to\infty} g(v-1/\sqrt{\lambda})\leq\frac{\pi e^{2/\sqrt{\lambda}}}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha}.$$

Puis en faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient que $\limsup_{v\to\infty} g(v)\leq 1$. En particulier, on en déduit que g est bornée. On note $A := \sup_v g(v)$.

Montrons maintenant que $\liminf_{v\to+\infty} g(v)\geqslant 1$. Pour cela, on va appliquer III.5 une deuxième fois,

4. Ça ne peut paraître rien comme ça, mais c'est sur ça que repose tout la fin de la preuve

cette fois-ci à $u_1 = v + \dfrac{\alpha}{\lambda}$ et $u_2 = v + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

$$g(v + \alpha/\lambda) \leq g(v + 1/\sqrt{\lambda})e^{1/\sqrt{\lambda} - \alpha/\sqrt{\lambda}} \leq g(v + 1/\sqrt{\lambda})e^{2/\sqrt{\lambda}}.$$

On refait alors les mêmes manipulations que précédemment.

$$g(v + 1/\sqrt{\lambda})e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} g(v + \alpha/\lambda) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha.$$

Pour faire comme précédemment il nous faut devoir estimer cette intégrale, pour cela on remarque que :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(v + \alpha/\lambda) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha - \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} g(v + \alpha/\lambda) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha \right| \\ &\leqslant \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} |g(v + \alpha/\lambda) - g(v - \alpha/\lambda)| \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha \leq 2A \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Donc par III.4 :

$$\liminf_{v \to \infty} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} g(v + \alpha/\lambda) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha = \pi + O(1/\sqrt{\lambda}).$$

On en déduit alors que :

$$\liminf_{v \to \infty} g(v) = \liminf_{v \to \infty} g(v + 1/\sqrt{\lambda}) \geq \frac{\pi + O(1/\sqrt{\lambda})}{e^{2/\sqrt{\lambda}} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha}.$$

Ainsi en faisant tendre $\lambda \to +\infty$: $\liminf_{v \to \infty} g(v) \geq 1$. On en déduit que g admet bien une limite en $+\infty$ et $\lim_{v \to \infty} g(v) = 1$. Par conséquent : $\lim_{x \to \infty} \frac{B(x)}{x} = 1$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

III.3 Recasages

Ce développement se recale très bien (les leçons sont rangées de celle ou le développement se recase le mieux à celui où il se recase le moins bien) :

- *Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.* Bon bah on étudie le comportement d'une somme partielle de nombres réels. Rien à dire de plus.
- *Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.* Pareil que pour la leçon 230, cela rentre tellement bien dans le leçon que j'ai pas vraiment de mot à ajouter.
- *Leçon 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales* Il se place très bien dans une partie sur les séries de Dirichlet, qu'il faut donc maîtriser un peu.
- *Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.* Si j compte bien, il y a 3 théorèmes d'interversion de limite-intégrale, cela me semble suffisant pour pouvoir la justifier dans cette leçon.
- *Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.* On utilise le théorème de convergence dominée, de convergence monotone, on utilise un peu de théorie sur la transformée de Fourier, ça rentre aussi sans problème dans cette leçon.
- *Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.* C'est assez surprenant au premier abord d'utiliser la transformation de Fourier que ça doit intriguer le jury qui ne connaîtrait pas ce développement. Ce n'est pas que du maquillage : on utilise quand même le théorème de Parseval qui est un théorème central dans la leçon : il faudrait sans doute mettre surtout l'accent sur le début du développement devant le jury.
- *Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.* Pareil que pour la leçon 239, ça rentre bien dans une partie sur les séries de Dirichlet (même si sans doute je lui préfère un développement plus classique sur les séries de Dirichlet qui je trouve est plus dans l'esprit de la leçon).
- *Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonction d'une ou plusieurs variables* Bon alors lui c'est un peu plus tendu, il faut se convaincre de l'importance de prendre le noyau de Féjer et pas une autre fonction. En fait, on a pas besoin forcément de prendre le noyau de Féjer, il suffit de prendre une fonction continue et intégrable dont la transformée de Fourier est conitnue à support compact et positif. L'exemple le plus simple (on ne prend pas la fonction nulle évidemment) de telle fonction du côté Fourier est un signal triangle et c'est la transformée du noyau de Féjer. Ensuite il faudrait faire le jour de l'oral la preuve de la transformée de Fourier du noyau de Féjer (tiens encore Parseval). Si le jury accepte l'inversion de Fourier dans

cette leçon pour le rôle que la gaussienne dans celui-ci, je ne vois pas en quoi il pourrait refuser celui-ci. Perso je le tente quand même pas parce que j'ai mieux.

III.4 Questions possibles autour du développement

III.5 Compléments

III.5.1 Le théorème des nombres premiers

Le théorème de Wiener-Ikehara mène à une preuve du théorème des nombres premiers qui n'est pas très longue, il en constitue un des passages difficiles. L'autre passage difficile de la preuve est le prolongement méromorphe de $\frac{\zeta'}{\zeta}$ sur l'ensemble $\{\mathcal{R}e(z) \geqslant 1\}$. Pour les lemmes suivant, on prend comme références [1] et le Murty (ils sont tous faits dans les deux mais pas forcément de la même manière). On commence d'abord par trois résultats classiques sur la fonction ζ :

Lemme III.3

— On a la formule suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > 1 : \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

— On obtient alors un prolongement analytique de $s \mapsto (s-1)\zeta(s)$ sur $\{\mathcal{R}e(s) > 0, s \neq 1\}$.

— On a la formule du développement en produit eulérien de ζ :

$$\forall s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > 1 : \quad \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration :

— Soit $s > 1$. Par la formule de sommation par parties :

$$\zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}.$$

— On applique le théorème d'holomorphie sous l'intégrale dans le membre de gauche de l'équation précédente pour voir qu'il est holomorphe sur $\mathcal{R}e(s) > 0$ sauf en $s = 1$.

— C'est le développpment eulérien de la série de Dirichlet associée à ζ. (Voir théorème 1.3 dans la Tenenbaum).

□

Lemme III.4

Soit $F(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs ou nuls, d'abscisse de convergence σ_C. Alors on a

$$3F(\sigma) + 4\mathcal{R}eF(\sigma + it) + \mathcal{R}eF(\sigma + 2it) \geqslant 0, \qquad \forall \sigma \geqslant \sigma_C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : C'est hyper astucieux. On pose $V(\theta) = 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geqslant 0$. Or :

$$3F(\sigma) + 4\mathcal{R}eF(\sigma + it) + \mathcal{R}eF(\sigma + 2it) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n V(t\log(n))}{n^\sigma},$$

ce qui donne le résultat par positivité des a_n. □

Lemme III.5

On a :

$$\zeta(\sigma)^3 \left|\zeta(\sigma + it)\right|^4 \left|\zeta(\sigma + 2it)\right| \geqslant 1, \quad \forall \sigma > 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : On voit que les coefficients qui apparaissent en facteur au dessus apparaissent en puissance dans la formule, ça invite à appliquer la formule précédente avec $\log(\zeta)$. Or on a pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement plus grande que 1 (par III.3 et par continuité du logarithme) :

$$\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Maintenant on veut écrire ça sous la forme générale d'une série de Dirichlet, c'est difficile à l'imaginer quand on l'a jamais vu donc je vais partir du bon résultat et arriver à l'expression précédente. On rappelle la définition de la fonction de Von Mangoldt :[5]

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) \text{ si } n = p^k \text{ où } p \text{ est un nombre premier et } k \geqslant 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)n^s} = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(p^k)}{p^{ks}\log(p^k)} = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \log(\zeta(s)). \tag{III.6}$$

En effet dans la première somme tous les termes d'indice n ne s'écrivant pas comme la puissance d'un nombre premier est nulle (car la fonction de Von Mangoldt est nulle sur ces termes). On applique le

5. On rappelle que cette fonction arithmétique n'est pas multiplicative. Par exemple $\Lambda(2) = \ln(2)$, $\Lambda(9) = \ln(3)$ mais $\Lambda(18) = 0$.

lemme précédent à cette série de Dirichlet, on obtient :

$$\forall \sigma > 1, \forall t \in \mathbb{R}^* : \quad \mathcal{Re}\left(3 \log \zeta(\sigma) + 4 \log \zeta(\sigma + 2it)\right) \geqslant 0.$$

Donc, en écrivant $|z|^2 = \mathcal{Re}(z)^2 + \mathcal{Im}(z)^2$ on obtient :

$$\forall \sigma > 1, \forall t \in \mathbb{R}^* : \left|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it)\right|^2 > 1,$$

ce qui donne le résultat attendu.

□

On en déduit le théorème suivant :

Théorème III.6

La fonction ζ ne possède aucun zéro dans le demi-plan $\{\sigma \geqslant 1\} - \{1\}$.

Démonstration :

— [6] On a pour tout s de partie réelle > 1 :

$$\zeta(s) \prod_p (1 - p^{-s}) = 1.$$

Or, pour un tel s la série de terme général p^{-s} converge absolument et donc le produit $\prod_p (1 - p^{-s})$ converge absolument et tend donc vers une limite finie. Ainsi $\zeta(s)$ est non nul pour un tel s sinon on aurait $\zeta(s) \prod_p (1 - p^{-s}) = 0$.

— Montrons maintenant que ζ ne possède aucun zéro sur la droite $\{\sigma = 1\} - \{1\}$. Supposons que $\zeta(s)$ possède un zéro d'ordre m en $s = 1 + it$, $t \neq 0$. Alors :

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\zeta(\sigma + it)}{(\sigma - 1)^m} = c \neq 0.$$

Soit aussi $m' \geqslant 0$ et $c' \neq 0$ tels que : [7]

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\zeta(\sigma + 2it)}{(\sigma - 1)^{m'}} = c'$$

6. Ici je fais un argument un peu perso, je ne comprends pas celui fait dans le Murty.
7. On ne sait pas si en ce point ζ s'annule ou non, c'est pour ça qu'on autorise $m' = 0$ dans le cas où ce n'est pas un zéro

De plus on sait que III.3 que

$$\lim_{\sigma \to 1+} (\sigma - 1)\zeta(\sigma) = 1.$$

Or par le lemme III.5, on a :

$$(\sigma - 1)\zeta(\sigma)^3(\sigma - 1)^{-4m} \left|\zeta(\sigma + it)\right|^4 (\sigma - 1)^{-m'} \left|\zeta(\sigma + 2it)\right| \geqslant (\sigma - 1)^{3-4m-m'}.$$

En faisant tendre σ vers 1^+ on obtient une absurdité.

□

On conclut donc au prolongement méromorphe recherché pour $\dfrac{\zeta'}{\zeta}$

Proposition III.7

La fonction $-\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ possède un prolongement méromorphe à $\{\mathcal{R}e(s) = 1\}$ avec seulement un pôle simple en $s = 1$, de résidu égal à 1.

Démonstration : Comme ζ ne s'annule pas sur $\mathcal{R}e(s) \geqslant 1$, $s \neq 1$, on sait que $-\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ est holomorphe sur cet ensemble. Pour calculer le résidu en 1, on se rappelle que 1 est un pôle d'ordre 1 et donc il suffit de calculer la limite de $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1)$ lorsque $s \to 1^+$. Pour cela on utilise encore le lemme III.3 pour écrire $(s-1)\zeta(s) = sf(s)$ où f est holomorphe sur $\mathcal{R}e(s) > 0$. Donc en dérivant puis en divisant par $\zeta \neq 0$ sur $\mathcal{R}e(s) > 1$:

$$1 + (s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{f(s)}{\zeta(s)} + s\frac{f'(s)}{\zeta(s)}.$$

On obtient finalement :

$$\lim_{s \to 1^+} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1) = 1.$$

□

On peut donc démontrer le théorème des nombres premiers sous cette forme grâce au théorème de Wiener-Ikehara

Théorème III.8: (des nombres premiers)

Si on note :

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n),$$

alors on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Démonstration : On va appliquer le théorème de Wiener-Ikehara à $-\frac{\zeta'}{\zeta}$, mais pour cela il faut montrer que c'est une série de Dirichlet. Pour cela on dérive terme à terme [8] la relation III.6 :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

On obtient alors le théorème des nombres premiers par l'application du théorème de Wiener-Ikehara.

□

Bon en vrai ce n'est pas forcément la forme connue du théorème des nombres premiers, on va donc finir par démontrer l'équivalence avec la forme du théorème des nombres premiers la plus connue qui est : si π désigne la fonction qui à un réel x associe $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, alors elle vérifie :

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\log(x)}{x}.$$

. Pour cela, il y a encore du boulot. On introduit θ comme la fonction $x \mapsto \sum_{p\leqslant x} \log(p)$. Cette fonction va nous servir de pont pour prouver l'équivalence entre "notre" forme du théorème des nombres premiers et celui plus classique :

Proposition III.9: (Une première forme équivalente du TNP)

Pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \leqslant \frac{(\log(x))^2}{2\sqrt{x}\log(2)}.$$

Ainsi on a l'équivalence suivante pour $x \to +\infty$:

$$\theta(x) \sim x \qquad \text{si, et seulement si} \qquad \psi(x) \sim x.$$

Démonstration : Il est clair que la première affirmation implique la deuxième. Soit $x > 0$, la démonstration se fait en deux temps :

— On commence déjà par remarquer que pour tout $x > 0$: $\sum_{m\leqslant \log_2(x)} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$. En effet comme la somme sur p ci-dessous est nulle pour $x^{\frac{1}{m}} < 2$, $i.e$, $m > \log_2(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{m}\sum_{\substack{p \\ p^m\leqslant x}} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{x} \sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{m}}} \log(p) = \sum_{m=1}^{\log_2(x)} \sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{m}}} \log(p) = \sum_{n\leqslant \log_2(x)} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

8. On a le droit de le faire car on a convergence uniforme sur tout compact du demi-espace de convergence d'une série de Dirichlet

— On voit alors :

$$0 \leqslant \psi(x) - \theta(x) = \sum_{2 \leqslant m \leqslant \log_2(x)} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

Or on a la majoration triviale pour tout $y > 0$: $\theta(y) = \sum_{p \leqslant y} \log(p) \leqslant y \log(y)$. On en déduit alors :

$$0 \leqslant \psi(x) - \theta(x) \leqslant \sum_{2 \leqslant m \leqslant \log_2(x)} x^{\frac{1}{m}} \log\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \leqslant \log_2(x)\sqrt{x}\log(\sqrt{x}) \leqslant \frac{\sqrt{x}\log(x)^2}{2\log(2)}.$$

□

Maintenant, voyons pourquoi cette fonction est plus intéressante que ψ en lien avec π :

Proposition III.10

Pour tout $x \geqslant 2$, on a :

$$\theta(x) = \pi(x)\log(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{III.7}$$

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log(t)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{III.8}$$

Démonstration : Paradoxalement au vu de la tête des formules, la preuve va aller assez vite. La première formule est la formule de sommation par parties appliquée pour $f : x \mapsto \mathbb{1}_{x\in\mathcal{P}}$ et $g = \log$. La deuxième formule est la formule de sommation par parties appliquée à $f(x) = \mathbb{1}_{x\in\mathcal{P}}\log(x)$ et $g = \frac{1}{\log}$. □

On peut enfin clore le spectacle :

Théorème III.11: (Formes équivalentes du théorème des nombres premiers)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

—
$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\log(x)}{x}.$$

—
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Démonstration :

— On suppose d'abord que $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\log(x)}{x}$.. D'après la formule III.7, il suffit de montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or notre hypothèse affirme que pour $t \to +\infty$, on a :

$$\frac{\pi(t)}{t} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(t)}\right).$$

Ainsi, par sommation des relations de comparaisons :

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

Or par intégration par parties :

$$\int_2^x \frac{1}{\log(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} - \int_2^x \frac{1}{(\log(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

La dernière intégrale étant négligeable devant $\frac{x}{\log(x)}$ (encore une fois par intégration des relations de comparison) [9] on a :

$$\int_2^x \frac{1}{\log(t)}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

On obtient alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$, c'est à dire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$.

— Le sens réciproque se fait exactement de la même manière, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. et d'après la formule III.8, il suffit de montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log(t)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or l'hypothèse implique que $\theta(t) = \mathcal{O}(t)$ et donc par sommation des relations de comparaison :

$$\frac{\log(x)}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log(t)^2}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\frac{\log(x)}{x}\int_2^x \frac{1}{\log(t)^2}\right).$$

On conclut alors de la même manière que dans le premier point : on fait une intégration par partie du terme qui il y a dans le $\mathcal{O}$ et la nouvelle intégrale qui apparait sera négligeable devant le terme de bord.

$\square$

9. On compare avec $\frac{\log(x)-1}{\log(x)^2}$ qui est bien une primitve de $\frac{x}{\log(x)}$.

III.5.2 Généralisations du théorème d'Ikehara-Wiener

On pourrait se demander si on peut généraliser le théorème d'Ikehara-Wiener en pour une série de Dirichlet à coefficients autres que réels positifs ou pour un pôle se situant à un autre endroit sur la droite réelle. La réponse est oui dans les deux cas. On va le voir dans cette partie. La première proposition généralise le théorème d'Ikehara-Wiener à des séries de Dirichlet à coefficients réels (pas forcément positifs).

Proposition III.12

Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet avec $a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que :

— $|a_n| \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où b_n vérifie les hypothèses du théorème d'Ikehara-Wiener.

— F peut être prolongée en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathcal{R}e(s) \geqslant 1\}$ et de plus f ne possède pas de pôle excepté en $s = 1$ où son résidu vaut $r > 0$.

Alors on a l'estimation suivante quand $x \to +\infty$:

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n = rx + o(x).$$

Démonstration : On pose $G(s) = \sum_n \frac{b_n - a_n}{n^s}$ pour tout $\mathcal{R}e(s) > 1$. La série de Dirichlet satisfait les hypothèses du théorème d'Ikehara-Wiener :

$$\sum_{n \leqslant x} (b_n - a_n) = (R - r)x + o(x).$$

Comme (b_n) vérifie les hyptothèses du théorème de Wiener-Ikehara :

$$\sum_{n \leqslant x} b_n = Rx + o(x).$$

On en déduit que :

$$\sum_{n \leqslant x} = rx + o(x).$$

$\square$

En fait on a mieux :

Proposition III.13

La proposition précédente est aussi valable si $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : On fait de la même manière qu'à la proposition précédente. On note pour tout s de partie réelle strictement plus grande que 1 :

$$f^*(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{a_n}}{n^s}.$$

On voit que $f = \frac{1}{2}(f + f*) + i\left(\frac{f - f*}{2i}\right)$. Il suffit maintenant d'appliquer la proposition précédente à $\frac{1}{2}(f + f*)$ et $\left(\frac{f - f*}{2i}\right)$ en prenant garde à ce qu'elles vérifient bien les hypothèses (en particulier on peut vérifier l'holomorphie de $f*$ en écrivant les équations de Cauchy-Riemann). □

Maintenant voyons qu'on peut généraliser le théorème d'Ikehara-Wiener pour une série de Dirichlet ayant un pôle se situant à un autre endroit sur la droite réelle

Proposition III.14

Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ une série de Dirichlet avec $b_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que :

— La série de Dirichlet $F(s)$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > c > 0$,

— F peut être prolongée en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathcal{R}e(s) \geqslant 1\}$ et de plus F ne possède pas de pôle excepté en $s = c$ où son résidu vaut $R > 0$.

Alors on a l'estimation suivante quand $x \to +\infty$:

$$B(x) := \sum_{n \leq x} b_n = R\frac{x^c}{c} + o\left(x^c\right).$$

Démonstration : On applique le théorème de Wiener-Ikehara à $s \mapsto G(s) := F(s + c - 1)$, quand $x \to +\infty$.

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{b_n}{n^{c-1}} = Rx + o(x).$$

Ainsi par sommation par parties, on en déduit le résultat annoncé :

$$\sum_{n \leqslant x} b_n = A(x)x^{c-1} - \int_1^x A(t)(c-1)t^{c-2}\,\mathrm{d}t = Rx^c - (c-1)\frac{Rx^c}{c} + o(x^c) = \frac{Rx^c}{c} + o(x^c).$$

□

Comme précédemment on peut généraliser la proposition précédente pour des séries de Dirichlet à coefficients complexes.

Proposition III.15

La proposition précédente est aussi valable si $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : On fait pareil que dans la proposition précédente mais cette fois-ci on applique la proposition III.13 à $s \mapsto G(s) := F(s + c - 1)$. $\square$

Références

[1] Gérald Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres : Cours et exercices*. Dunod, 2022.